CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE FORMATION DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHEMATIQUES I

Dans les trois parties du problème α, β, a_o et a_1 sont des constantes réelles.

β n'est pas nul.

On appelle r et r' les racines de $X^2 - \alpha X - \beta = 0$ (1)

et on pose : $R = \inf\left(\frac{1}{|r|}, \frac{1}{|r'|}\right)$ on notera que R est positif.

1ère partie

1°/ Soit S la fonction de la variable réelle x définie par :

$$S(x) = \frac{(a_o \alpha - a_1) x - a_o}{\beta x^2 + \alpha x - 1}$$

a) Vérifier que : $S''(0) = 2 [\alpha S'(0) + \beta S(0)]$

b) Appliquer la formule de LEIBNIZ au produit $(\beta x^2 + \alpha x - 1) . S(x)$ et montrer que :

pour $n \geqslant 2$ $\qquad \frac{S^{(n)}(0)}{n!} = \alpha \frac{S^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \beta \frac{S^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}$

2°/ a) Décomposer la fraction S en éléments simples. On trouvera :

pour $r \neq r'$ $\quad S(x) = \frac{a_o r' - a_1}{r' - r} \cdot \frac{1}{1 - rx} + \frac{a_o r - a_1}{r - r'} \cdot \frac{1}{1 - r'x}$

pour $r = r'$ $\quad S(x) = \frac{a_1 - a_o r}{r} \cdot \frac{1}{(1 - rx)^2} + \frac{2 a_o r - a_1}{r} \cdot \frac{1}{1 - r x}$

b) S est développable en série entière. Quel est le rayon de convergence de cette série ? Exprimer le coefficient de x^n en fonction de a_o , a_1, r et r'.

2ème partie

3°/ On considère la suite $\mathcal{A}$: $\{a_o\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots\}$

pour $n \geqslant 2$ $\qquad a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$

On appelle A_n le point dont les coordonnées dans une base sont n et a_n

a) Comment faut-il choisir α et β pour que les points $A_o\ A_1\ A_2\ \ldots\ A_n$ soient alignés quels que soient a_o et a_1 ?

b) Donner dans ce cas l'expression de a_n en fonction de a_o, a_1 et n

.../...

4°/ On associe à la suite $\mathcal{A}$ la série $\mathcal{S}$ de terme général $a_n x^n$

a) Soit M le plus grand des quatre réels.

$$2|\alpha| \quad , \quad \sqrt{2|\beta|} \quad , \quad |a_o| \quad , \quad \sqrt{|a_1|}$$

Montrer que $|a_n| \leq M^{n+1}$ et déduire de ceci que le rayon de convergence de $\mathcal{S}$ n'est pas nul.

b) On considère le produit de la somme de la série $\mathcal{S}$ par le trinôme $\beta x^2 + \alpha x - 1$. Cette fonction est donc développable en une série entière dont le rayon de convergence est au moins celui de $\mathcal{S}$. Déterminer les coefficients de ce développement et en déduire que la somme de la série $\mathcal{S}$ est la fonction S définie à la 1ère question.

5°/ a) On suppose $r \neq r'$

En utilisant l'expression de a_n qui résulte de la question 2b, calculer la somme $s_n = a_o + a_1 + a_2 \quad + a_n$

en fonction de a_o , a_1 , r et r'

b) On suppose $r = r'$

Calculer la somme $\sum_{k=o}^{n} (k + 1) r^k$

et trouver l'expression de s_n en fonction de a_o , a_1 , r et n

c) On suppose $R > 1$

Montrer que la suite s_n est convergente et déterminer sa limite en fonction de a_o a_1 α et β

Calculer les limites de

$$a_o + a_2 + \ldots + a_{2n} \text{ et de } a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$$

6°/ Calcul numérique.

On suppose $a_o = 0$ $a_1 = 1$ $\alpha = 10$ $\beta = -1$

Déterminer la limite λ de $\frac{s_n}{a_n}$ quand n tend vers l'infini.

Vérifier que $\sqrt{6} = 4\lambda - 2$

Compléter le tableau ci-dessous :

d) Il résulte des questions 3a) et 7a) que, parmi les solutions de (2) peuvent figurer des polynômes du premier degré.

Existe-t-il des polynômes de degré supérieur à un qui sont solutions de (2) ?

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	1	10	99.				
s_n	1	11					
$\frac{s_n}{a_n}$	1	1,1					
$4\frac{s_n}{a_n} - 2$	2	2,4					

3ème partie

7°/ On se propose de chercher s'il existe des applications continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle:

$$f(x+2) = \alpha f(x+1) + \beta f(x) \qquad (2)$$

et les conditions : $f(0) = a_0 \quad f(1) = a_1$

a) Démontrer que l'application affine par morceaux dont le graphe est la ligne polygonale $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ .. définie à la question 3 a) est une solution de la question.

b) On se donne une application continue $\hat{f}$ du segment [0,2] dans $\mathbb{R}$ qui satisfait aux conditions

$$f(0) = a_0 \quad f(1) = a_1 \quad f(2) = \alpha a_1 + \beta a_0$$

Montrer qu'il existe une solution unique de (2) dont la restriction au segment [0 2] est $\hat{f}$

c) On suppose que $\hat{f}$ est dérivable sur [0 2] , $\hat{f}$ admet donc une dérivée à droite $\hat{f}'(0^+)$ et une dérivée à gauche $\hat{f}'(2^-)$. A quelle condition la solution de (2) dont $\hat{f}$ est la restriction sur [0 2] est-elle dérivable?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail